Доклады Академии наук БССР

1987 Том XXXI № 12

УДК 539.12

В. Г. БАРЫШЕВСКИЙ

НЕУСТОЙЧИВОСТЬ ВОЛН В ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СРЕДЕ

(Представлено академиком АН БССР М. А. Ельяшевичем)

Теория распространения волн в нелинейной однородной среде разработана достаточно полно и в слаболинейном случае позволяет описывать процессы усиления и генерации волн во многих реальных ситуациях (см., например, [1]).

Если среда периодична в пространстве, то нелинейный процесс развивается на фоне брэгговской дифракции волн. Ниже показано, что для всех нелинейных процессов (трехволновых, четырехволновых и т. п.) дифракция волн в такой среде приводит к изменению степени корневой зависимости инкремента неустойчивости волн от нелинейной восприимчивости системы, если хотя бы одна из образуемых в нелинейном процессе волн испытывает дифракцию в условиях, когда корни дисперсионного уравнения, характеризующего периодическую среду, в линейном приближении пересекаются. В частном случае пучковой неустойчивости ансамбля осцилляторов и процесса распада волны накачки в релятивистском пучке на электромагнитную волну другой частоты и волну зарядовой плотности указанная закономерность была установлена нами в работах [2, 3].

Для определенности рассмотрим случай нелинейности низшего порядка, приводящей к взаимодействию трех электромагнитных волн с частотами $\omega_3=\omega_1+\omega_2$, ω_1 и ω_2. Он описывается системой трех нелинейных волновых уравнений (см. [4]):

$$\begin{gathered}
\nabla\times\nabla\times\mathbf{E}_1(\omega_1)-\left(\frac{\omega_1}{c}\right)^2\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r},\ \omega_1)\cdot\mathbf{E}_1(\omega_1)=\\
=4\pi\left(\frac{\omega_1}{c}\right)^2\boldsymbol{\chi}(\mathbf{r},\ \omega_1=\omega_3-\omega_2)\cdot\mathbf{E}_3(\omega_3)\,\mathbf{E}_2^*(-\omega_2),\\
\nabla\times\nabla\times\mathbf{E}_2(\omega_2)-\left(\frac{\omega_2}{c}\right)^2\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r},\ \omega_2)\cdot\mathbf{E}_2(\omega_2)=\\
=4\pi\left(\frac{\omega_2}{c}\right)^2\boldsymbol{\chi}(\mathbf{r},\ \omega_2=\omega_3-\omega_1)\cdot\mathbf{E}_3(\omega_3)\,\mathbf{E}_{-1}^*(-\omega_1),\qquad(1)\\
\nabla\times\nabla\times\mathbf{E}_3(\omega_3)-\left(\frac{\omega_3}{c}\right)^2\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r},\ \omega_3)\cdot\mathbf{E}_3(\omega_3)=\\
=4\pi\left(\frac{\omega_3}{c}\right)^2\boldsymbol{\chi}(\mathbf{r},\ \omega_3=\omega_1+\omega_2)\cdot\mathbf{E}_1(\omega_1)\,\mathbf{E}_2(\omega_2),
\end{gathered}$$

где $\mathbf{E}_i$ — вектор напряженности электрического поля в волне типа i ($i=1,\ 2,\ 3$); $\boldsymbol{\varepsilon}(\mathbf{r},\ \omega_i)$ — периодический в пространстве тензор диэлектрической проницаемости среды на частоте ω_i; $\chi(\mathbf{r}, \omega_i)$ — периодический в пространстве тензор нелинейной восприимчивости.

Будем далее ради простоты считать, что взаимодействие волн $\mathbf{E}_1$ и $\mathbf{E}_2$ происходит в присутствии сильной волны накачки $\mathbf{E}_3$, изменением амплитуды которой на рассматриваемом интервале можно пренебречь, влиянием периодичности χ и $\varepsilon(\mathbf{r}, \omega_2)$ на процесс пренебрегаем. В этом случае нелинейная система (1) превращается в линейную систему двух уравнений, описывающую переходы между волнами E_1 и E_2. Будем также считать, что изменения $\varepsilon(\mathbf{r}, \omega_1)$, обусловленные периодичностью среды, малы. Это позволяет применить для анализа влияния дифракции двухволновое приближение [5].

Предположим, что среда оптически изотропна, дифракцию испытывает волна, вектор поляризации которой ортогонален плоскости дифракции. Ищем $\mathbf{E}_1$ в виде

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{e}_1 (A_1 e^{i(\mathbf{k}_1\mathbf{r}-\omega_1 t)} + A_{1\tau} e^{i((\mathbf{k}_1+2\pi\boldsymbol{\tau})r-\omega_1 t)}), \tag{2}$$

где $2\pi\boldsymbol{\tau}$ — вектор обратной решетки, характеризующей семейство плоскостей, на которых происходит дифракция.

Для $\mathbf{E}_2$ имеем

$$\mathbf{E}_2^*(-\omega_2) = \mathbf{e}_2^* A_2^* e^{i((\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_3)\mathbf{r}+\omega_2 t)}. \tag{3}$$

Подставляя (2), (3) в (1), получим

$$\begin{gathered}
\left(k_1^2 - \frac{\varepsilon(\omega_1)\,\omega_1^2}{c^2}\right) A_1 - \frac{\varepsilon_\tau \omega_1^2}{c^2} A_{1\tau} - a_{12} A_2^* = 0, \\
-\frac{\varepsilon_{-\tau}\omega_1^2}{c^2} A_1 + \left((\mathbf{k}_1 - 2\pi\boldsymbol{\tau})^2 - \frac{\varepsilon(\omega_1)\,\omega_1^2}{c^2}\right) A_{1\tau} = 0, \\
\left((\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3)^2 - \frac{\varepsilon^*(\omega_2)\,\omega_2^2}{c^2}\right) A_2^* = a_{21}^* A_1,
\end{gathered} \tag{4}$$

где $\varepsilon(\omega_1)$, ε_τ, $\varepsilon_{-\tau}$ — коэффициенты разложения в ряд Фурье диэлектрической проницаемости среды $\varepsilon(\mathbf{r}, \omega_1) = \varepsilon(\omega_1) + \sum_{\tau\neq 0} \varepsilon_\tau e^{i2\pi\tau r}$; k_3 — волновой вектор волны накачки,

$$a_{is} = 4\pi \left(\frac{\omega_i}{c}\right)^2 \mathbf{e}_i \cdot \chi \cdot \mathbf{E}_3 \mathbf{e}_s^*.$$

Подставляя последнее уравнение (4) в первое, получаем систему двух линейных однородных уравнений, условие разрешимости которых дается равенством нулю детерминанта этой системы:

$$\begin{gathered}
\left[\left(k_1^2 - \frac{\varepsilon(\omega_1)\,\omega_1^2}{c^2}\right)\left((\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3)^2 - \frac{\varepsilon^*(\omega_2)}{c^2}\omega_2^2\right) - a_{12} a_{21}^*\right] \times \\
\times \left((\mathbf{k}_1 - 2\pi\boldsymbol{\tau})^2 - \frac{\varepsilon(\omega_1)\,\omega_1^2}{c^2}\right) - \\
-\frac{\varepsilon_\tau \varepsilon_{-\tau}\omega_1^4}{c^4}\left[(\mathbf{k}_1 - \mathbf{k}_3)^2 - \frac{\varepsilon^*(\omega_2)}{c^2}\omega_2^2\right] = 0.
\end{gathered} \tag{5}$$

Мы рассматриваем случай, когда условия дифракции для волн выполнены. Поэтому

$$k_1^2 - \frac{\varepsilon(\omega_1)\,\omega_1^2}{c^2} \simeq 2k_{01}(k_1 - k_{01}),$$

где

$$k^2_{01}=\frac{\varepsilon(\omega_1)\omega_1^2}{c^2},\quad (\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_3)^2-\frac{\varepsilon^*(\omega_2)}{c^2}\omega_2^2\simeq 2k_{02}(|\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_3|-k_{02}),$$

$$(k_1-2\pi\tau)^2-\frac{\varepsilon(\omega_1)\omega_1^2}{c^2}\simeq 2k_{01}(|\mathbf{k}_1-2\pi\boldsymbol{\tau}|-k_{01}).$$

Как следствие, для (5) имеем

$$[2k_{01}(k_1-k_{01})2k_{02}(|\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_3|-k_{02})-a_{12}a^*_{21}]\,2k_{01}(|\mathbf{k}_1-2\pi\boldsymbol{\tau}|-k_{01})-$$
$$-\frac{\varepsilon_\tau\varepsilon_{-\tau}\omega_1^4}{c^4}2k_{02}(|\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_3|-k_{02})=0 \tag{6}$$

или

$$\left[4k^2_{01}(k_1-k_{01})(|\mathbf{k}_1-2\pi\boldsymbol{\tau}|-k_{01})-\frac{\varepsilon_\tau\varepsilon_{-\tau}\omega_1^4}{c^4}\right]2k_{02}(|\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_3|-k_{02})-$$
$$-a_{12}a^*_{21}\,2k_{01}(|\mathbf{k}_1-2\pi\boldsymbol{\tau}|-k_{01})=0. \tag{7}$$

Если $\varepsilon_\tau=0$, то (7) превращается в известное уравнение [4]

$$2k_{01}(k_1-k_{01})2k_{02}(|\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_3|-k_{02})-a_{12}a^*_{21}=0, \tag{8}$$

приводящее в условиях синхронизма, т. е. в случае, когда параметры выбраны так, что $(k_1-k_{01})=-(|\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_3|-k_{02})=\varkappa$, к инкременту $\varkappa_u=$ $=\sqrt{\dfrac{|a_{12}a^*_{21}|}{4k_{01}k_{02}}}$.

Проанализируем теперь уравнение (7). В соответствии с результатами [2] в дисперсионном уравнении, описывающем периодическую среду (оно получается приравниванием нулю прямоугольной скобки (7)), возможна ситуация, когда корни совпадают. Это позволяет записать (7) в виде

$$4k_{01}k_{02}(k_1-k_{1s})^2(|\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_3|-k_{02})-a_{12}a^*_{21}(|\mathbf{k}_1-2\pi\boldsymbol{\tau}|-k_{01})=0, \tag{9}$$

где k_{1s} — корень дисперсионного уравнения для среды.

Введем новую переменную $\varkappa=(k_1-k_{1s})$ и так же, как и выше, потребуем, чтобы $(k_1-k_{1s})=(|\mathbf{k}_1-\mathbf{k}_3|-k_{02})$. Этого можно добиться выбором k_3.

В результате (9) принимает вид

$$4k_{01}k_{02}\varkappa^3-a_{12}a^*_{21}2k_{01}(\varkappa+g)=0, \tag{10}$$

где слагаемое g по порядку величины сравнимо с разностью $k_{1s}-k_{01}$. В случае слабой нелинейности $g\gg\varkappa$. Как следствие имеем из (10)

$$\varkappa^3=\frac{g|a_{12}a^*_{21}|}{4k_{01}k_{02}}. \tag{11}$$

Для одного из корней в зависимости от знака g инкремент нарастания неустойчивости

$$\varkappa'_u=\sqrt[3]{\frac{|g|\,|a_{12}a^*_{21}|}{4k_{01}k_{02}}}=\sqrt[3]{|g|\,\varkappa_u^2}.$$

Как видим, корневая зависимость инкремента в рассматриваемом случае значительно изменилась по сравнению со случаем отсутствия периодичности. Так же, как и в случаях [2, 3], с ростом числа волн, участвующих в дифракции, степень корневой зависимости возрастает.

Полученный результат имеет общее значение и проявляется для любых типов волн в периодической среде в условиях, когда выбором параметров обеспечивается совпадение корней дисперсионного уравнения периодической среды (в системе возникает вырождение).

Статическая решетка является частным случаем динамической решетки, которая может быть создана, например, световой волной или ультразвуком. Анализ показывает, что и в этом случае возможно изменение характера корневой зависимости инкремента неустойчивости.

Высокая степень корневой зависимости инкремента приводит к тому, что в общем случае знак инкремента может быть как положительным, так и отрицательным. Физический смысл полученного результата наиболее просто можно пояснить в случае пучка, движущегося в пространственно периодической среде. Если инкремент приводит к нарастанию волн в пучке, то вследствие закона сохранения энергии пучок тормозится, если же инкремент таков, что падающие на него волны поглощаются пучком, то он ускоряется.

Summary

It is shown that a space periodicity of the medium causes the change of power dependence of the nonlinear process increment.

Литература

1. Ахманов С. А. // УФН. 1986. Т. 149. № 3. С. 361—390. 2. Барышевский В. Г., Феранчук И. Д. // Весці АН БССР. Сер. фіз.-мат. навук. 1985. № 2. С. 79—86. 3. Барышевский В. Г., Дубовская И. Я. Материалы 15-го Всесоюзного совещания по физике взаимодействия заряженных частиц с кристаллами. М., 1986. С. 60—62. 4. Бломберген Н. Нелинейная оптика. М., 1966. 424 с. 5. Барышевский В. Г. Ядерная оптика поляризованных сред. Минск, 1976. 143 с.

НИИ ядерных проблем при Белорусском государственном университете им. В. И. Ленина

Поступило 18.12.86